

© 2025 г. В.О. НИКИФОРОВ, д-р техн. наук (nikiforov_vo@itmo.ru),
Д.Н. ГЕРАСИМОВ, канд. тех. наук (dngerasimov@itmo.ru),
Н.А. ДУДАРЕНКО, канд. тех. наук (dudarenko@itmo.ru)
(Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

АДАПТИВНАЯ КОМПЕНСАЦИЯ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ПО ВЫХОДУ¹

Рассматривается задача адаптивной компенсации внешних заранее неизвестных детерминированных возмущений при управлении по выходу (т.е. по вектору выходных переменных) многоканальным линейным объектом. Предлагаемое новое решение основано на адаптивной реализации метода внутренней модели и построении специального наблюдателя, позволяющего получить регрессионную модель многомерного возмущения и синтезировать адаптивный регулятор с числом настраиваемых параметров, равным числу неизвестных коэффициентов характеристического полинома модели возмущения. При определенных условиях динамический порядок такого наблюдателя оказывается существенно ниже, чем у известных решений.

Ключевые слова: адаптивная компенсация возмущений, метод внутренней модели, многомерные системы.

DOI: 10.31857/S0005231025040018, EDN: CAZMQB

1. Введение

Одним из эффективных и хорошо разработанных методов асимптотической компенсации внешних детерминированных возмущений является метод внутренней модели, что подтверждается практическим опытом его использования в таких приложениях, как системы активной виброзащиты [1–3], двигатели внутреннего сгорания [4, 5], мельничные механизмы [6, 7], процессы непрерывного литья [8], жесткие компьютерные диски [9, 10], системы сейсμοзащиты [11], морские краны [12, 13], системы снижения пульсаций в преобразователях тока [14] и в синхронных машинах [15] и др. В соответствии с данным методом внешнее возмущение моделируется в виде выхода динамической автономной системы (генератора возмущения), а для его полной компенсации данная модель соответствующим образом воспроизводится

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (госзадание № 2019-0898).

в контуре замкнутой системы. Изначально метод внутренней модели был разработан для класса линейных систем и линейных моделей внешних возмущений с известными параметрами [16; 17; 18, глава 4]. Однако предположение об известности параметров модели внешнего возмущения снижает практическую ценность такого подхода, так как означает необходимость точного знания формы и частот внешнего возмущения. Случай, когда заранее известен только класс возмущений, но не их точные параметры, имеет большее практическое значение.

Для компенсации заранее неизвестных возмущений была предложена адаптивная реализация метода внутренней модели, при которой параметры модели генератора полагаются неизвестными (для обзора см. [19, секция 1.4; 20] и приведенные в них списки литературы). Данный подход был разработан как для систем со скалярным входом и скалярным выходом [21–25], так и для многоканальных систем с управлением по вектору состояния [19, секция 4.2; 26; 27] или по выходу [20, 28]. Особый класс представляют многоканальные системы с возмущением, приведенным ко входу [29].

Однако известные решения компенсации возмущений на основе принципа внутренней модели в многоканальных системах по выходу (как неадаптивные [17; 18, глава 4], так и адаптивные [20, 28]) предусматривают построение в каждом канале многоканальной системы специального наблюдателя (динамического фильтра, предкомпенсатора), размерность которого равна размерности всей модели генератора возмущений. Таким образом, общая размерность используемых наблюдателей равна произведению размерности модели генератора возмущений на число каналов в системе управления. Это ведет к увеличению динамического порядка регулятора, а также к увеличению числа настраиваемых параметров.

В настоящей статье показано, что при дополнительном неограничительном предположении о блочно-диагональной структуре генератора возмущения возможно построение системы управления с одним наблюдателем, размерность которого равна размерности модели командного генератора. Как следствие, существенно понижается не только динамическая размерность регулятора, но и число настраиваемых параметров.

Предлагаемое решение основано на походе, разработанном в [19, 30, 31], и состоит в построении специального наблюдателя внешнего возмущения, позволяющего получить удобную несмешанную параметризацию возмущения. В свою очередь это позволяет использовать разработанный аппарат матричных уравнений [18] и строго доказать достижение цели управления.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе приведена постановка задачи. В третьем разделе представлен наблюдатель возмущения и обсуждены проблемы его построения для многомерных систем. В разделах 4 и 5 синтезирован адаптивный регулятор, а в разделе 6 приводятся результаты моделирования.

В статье используются следующие обозначения: $|y|$ – евклидова норма вектора y ; s – комплексная переменная; запись $W(s)[\delta]$ означает преобразование сигнала δ (возможно, векторного) динамическим блоком с передаточной функцией (матрицей для векторного сигнала) $W(s)$.

2. Постановка задачи

В статье рассматривается стационарный многоканальный объект вида

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u + \delta), & x(0), \\ y = Cx, \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор управляющих воздействий, $y \in \mathbb{R}^m$ – вектор регулируемых переменных, $n \geq m$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – известные матрицы постоянных коэффициентов, $\delta \in \mathbb{R}^m$ – вектор неизмеряемых внешних возмущений.

Допущение 1. Относительно объекта управления (1) полагаются выполненными следующие допущения:

Д.1.1. тройка матриц (A, B, C) полностью управляемая и наблюдаемая, а матрицы B и C полного ранга, т.е. $\text{rank } B = \text{rank } C = m$;

Д.1.2. модель вход–состояние–выход (1) является минимально-фазовой;

Д.1.3. прямым измерениям доступен только вектор регулируемых переменных y , но не вектор состояния x .

Замечание 1. Допущение Д.1.1 означает, что система (1) является управляемой по вектору регулируемых переменных y (см. определение и критерий в [32]).

Замечание 2. В данной статье под минимально-фазовой моделью (1) понимается модель, не имеющая инвариантных нулей или все инвариантные нули которой имеют отрицательные вещественные части. Под *инвариантным нулем* понимается комплексное число s_0 , при подстановке которого в матрицу Розенброка (т.е., при $s = s_0$)

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

ее столбцовый ранг понижается [33, с. 237]. Для систем с одинаковым числом управляющих воздействий и регулируемых переменных, у которых матрица Розенброка является квадратной, это означает вырождение данной матрицы при $s = s_0$.

Допущение 2. Внешнее возмущение $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_m]^\top$ такое, что:

Д.2.1. каждая его компонента δ_i ($i = 1, \dots, m$) может быть представлена в виде выхода линейного генератора (экзосистемы)

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{\xi}_i = \Gamma_i \xi_i, & \xi_i(0), \\ \delta_i = h_i^\top \xi_i, \end{cases}$$

где $\xi_i \in \mathbb{R}^{q_i}$ – вектор состояния, $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{q_i \times q_i}$ – матрица постоянных коэффициентов, все собственные числа которой являются простыми и лежат на мнимой оси, $h_i \in \mathbb{R}^{q_i}$ – вектор постоянных коэффициентов;

Д.2.3. параметры матриц Γ_i и векторов h_i являются неизвестными, в то время как размерности q_i известны;

Д.2.3. без потери общности пары (h_i^\top, Γ_i) считаются полностью наблюдаемыми.

Замечание 3. Общая экзосистема, генерирующая возмущение δ , может быть представлена в виде

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{\xi} = \Gamma\xi, & \xi(0), \\ \delta = H\xi, \end{cases}$$

где $\xi = [\xi_1^\top, \dots, \xi_m^\top]^\top \in \mathbb{R}^q$, матрицы $\Gamma = \text{diag}\{\Gamma_i\}$ и $H = \text{diag}\{h_i^\top\}$ ($i = 1, \dots, m$) являются блочно-диагональными и $q = \sum_{i=1}^m q_i$.

В статье решается следующая задача.

Задача 1. Требуется синтезировать закон управления в форме обратной связи по вектору регулируемых переменных y , обеспечивающий ограниченность всех сигналов в замкнутой системе и достижение целевого условия

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0.$$

Другими словами, требуется стабилизация объекта с одновременной компенсацией внешних возмущений. Так как в соответствии с допущением Д.2.3 внешнее возмущение является заранее неизвестным, то классический метод внутренней модели [16–18] в данном случае является неприменимым, и для решения поставленной задачи будет использована адаптивная модификация метода внутренней модели [19, 21, 31]. Главное отличие от известных решений, разработанных ранее для многоканальных систем [19, 26], состоит в том, что доступными для управления являются только выходные переменные y , а не весь вектор состояния x . Как отмечено ниже (см. раздел 3.2), задача компенсации неизвестных возмущений в многоканальных системах при управлении по выходу имеет принципиальную особенность, которая не позволяет непосредственно использовать результаты, полученные для одноканальных систем.

Поставленная задача будет решена в три шага. Сначала с помощью специального наблюдателя будет получена параметризованная модель внешнего возмущения в виде линейной регрессии с постоянной матрицей неизвестных коэффициентов и физически реализуемым регрессором (измеряемым/вычисляемым по управлению и выходу). Затем будет построен алгоритм настройки компенсирующей компоненты закона управления. На последнем шаге будет построен наблюдатель вектора состояния и синтезирована стабилизирующая компонента управления.

3. Наблюдатель возмущения

3.1. Каноническая форма экосистемы и параметризация возмущения

При управлении по выходной переменной для построения наблюдателя скалярного возмущения оказывается полезным следующее утверждение, позволяющее выразить возмущение δ_i через *фильтрованное возмущение* $\delta_{fi} = w_i(s)[\delta_i]$, где $w_i(s)$ – минимально фазовая асимптотически устойчивая передаточная функция [19, с. 315].

Лемма 1. Скалярное возмущение δ_i может быть представлено в виде

$$(5) \quad \delta_i = \psi_{fi}^\top \xi_{fi} + \epsilon_i,$$

где $\psi_{fi} \in \mathbb{R}^{q_i}$ – вектор постоянных неизвестных параметров, ϵ_i – экспоненциально затухает, регрессор $\xi_{fi} \in \mathbb{R}^{q_i}$ является вектором состояния наблюдателя

$$(6) \quad \dot{\xi}_{fi} = G_i \xi_{fi} + l_i \delta_{fi},$$

где $G_i \in \mathbb{R}^{q_i \times q_i}$ – произвольная гурвицева матрица, $l_i \in \mathbb{R}^{q_i}$ – постоянный вектор, такой что пара матриц (G_i, l_i) образует управляемую пару матриц.

В методических целях представим доказательство леммы 1, которое отличается от доказательства, приведенного в [19, с. 315]. На основе его анализа в разделе 3.2 покажем принципиальную проблему, возникающую в случае многоканальных систем.

Доказательство. Пусть (A_{fi}, b_{fi}, c_{fi}) – минимальная реализация передаточной функции $w_i(s)$ и

$$\delta_{fi} = c_{fi}^\top \chi_i, \quad \dot{\chi}_i = A_{fi} \chi_i + b_{fi} \delta_i,$$

где χ_i – вектор состояния минимальной реализации фильтра $w(s)$. Известно [18, с. 87], что вынужденная составляющая χ_i^* вектора состояния χ_i в установившемся режиме (т.е. без учета экспоненциально затухающей переходной компоненты) может быть представлена в виде $\chi_i^* = M_{\xi_i} \xi_i$, где матрица подобия M_{ξ_i} является решением уравнения Сильвестра

$$(7) \quad M_{\xi_i} \Gamma_i - A_{fi} M_{\xi_i} = b_{fi} h_i^\top.$$

Так как матрица A_{fi} гурвицева, а собственные числа матрицы Γ_i лежат на мнимой оси, то данное матричное уравнение имеет единственное решение M_{ξ_i} [18, с. 370]. Тогда можно записать

$$\delta_{fi} = \bar{h}_i^\top \xi_i + \bar{\epsilon}_i, \quad \dot{\xi}_i = \Gamma_i \xi_i,$$

где $\bar{h}_i^\top = c_{fi}^\top M_{\xi_i}$, а $\bar{\epsilon}_i$ экспоненциально затухает. Так как фильтр $w_i(s)$ является минимально фазовым, то пара $(\bar{h}_i^\top, \Gamma_i)$ является наблюдаемой. Для

вынужденной составляющей ξ_{fi}^* состояния ξ_{fi} фильтра (6) справедливо соотношение $\xi_{fi}^* = M_{fi}\xi_i$, где матрица подобия M_{fi} является решением уравнения Сильвестра

$$(8) \quad M_{fi}\Gamma_i - G_iM_{fi} = l_i\bar{h}_i^\top.$$

Так как спектры матриц Γ_i и G_i не пересекаются, пара (G_i, l_i) является полностью управляемой, а пара (Γ_i, \bar{h}_i) является полностью наблюдаемой, то существует единственная невырожденная матрица M_{fi} , являющаяся решением уравнения Сильвестра (8) [34, с. 240]. Тогда $\xi_i = M_{fi}^{-1}\xi_{fi}^*$, откуда с учетом второго уравнения из (2) непосредственно следует справедливость (5) с $\psi_{fi}^\top = h_i^\top M_{fi}^{-1}$.

Замечание 4. Особо отметим, что для построения фильтра (6) и регрессионной модели (5) решение матричных уравнений (7) и (8) не требуется и достаточно доказательства факта существования обратимой матрицы M_{fi} .

3.2. Фильтрованное несмешанное возмущение

Введем в рассмотрение динамический блок вида

$$(9) \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L_y(y - C\hat{x}),$$

где $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния с произвольным начальным условием $\hat{x}(0)$, а матрица L_y выбрана так, что матрица $A_L = A - L_yC$ является гурвицевой и ее корни не совпадают с инвариантными нулями системы (1). Тогда для вектора невязки $\varepsilon = x - \hat{x}$ имеем

$$(10) \quad \dot{\varepsilon} = A_L\varepsilon + B\delta, \quad \varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0).$$

Определим *фильтрованное возмущение* выражением

$$(11) \quad \delta_f = y - C\hat{x},$$

для которого справедливо представление $\delta_f = C\varepsilon$. Тогда $\delta_f = W_L(s)[\delta] + \epsilon_f$, где $W_L(s) = C(sI - A_L)^{-1}B$, а $\epsilon_f = Ce^{A_L t}\varepsilon(0)$ экспоненциально затухает.

Если $m = 1$, то на основании выхода наблюдателя (9) может быть сформирован регрессор модели (5). Исследуем, можно ли непосредственно распространить утверждение леммы 1 на случай многомерных систем, заменив фильтр со скалярным входом (6) на фильтр с векторным входом

$$\dot{\xi}_f = G\xi_f + L\delta_f,$$

где $G = \text{diag}\{G_i\}$, $L = \text{diag}\{l_i\}$. В рассматриваемом случае векторное фильтрованное возмущение δ_f является выходом модели (без учета экспоненциально затухающего члена)

$$\delta_f = C\varepsilon, \quad \dot{\varepsilon} = A_L\varepsilon + B\delta$$

и уравнение Сильвестра (7) принимает вид

$$(12) \quad M_\xi \Gamma - A_L M_\xi = B H,$$

и имеет единственное решение M_ξ при принятых условиях. Тогда фильтрованное векторное возмущение δ_f может быть представлено в виде

$$\delta_f = \bar{H} \xi + \epsilon \quad \dot{\xi} = \Gamma \xi,$$

где ϵ экспоненциально затухает, а матрица $\bar{H} = C M_\xi$ в общем случае не является блочно-диагональной. При этом уравнение (8) принимает вид

$$(13) \quad M_f \Gamma - G M_f = L \bar{H}.$$

Как известно, в случае многомерных систем (см. [34, с. 259] и пример 2.9 на стр. 54 в [26]) условие, что матрицы Γ и G не имеют общих собственных чисел, а пары (G, L) и (Γ, \bar{H}) являются полностью управляемыми и наблюдаемыми, является необходимым, но не достаточным для существования невырожденного решения M_f . В случае вырожденности матрицы M_f не существует параметризации $\delta = \Psi \xi_f + \epsilon$, где $\Psi = H M_f^{-1}$. Это не позволяет непосредственно расширить лемму 1 на случай векторного возмущения.

Возможным путем преодоления этой проблемы является приведение матрицы \bar{H} к блочно-диагональному виду. Тогда уравнение (13) распадается на t независимых уравнений типа (8), гарантированно имеющих невырожденные решения.

Воспользуемся следующим вспомогательным утверждением.

Лемма 2. При условии выполнения допущений Д.1.1–Д.1.3 существует (возможно, не единственная) физически реализуемая асимптотически устойчивая $t \times t$ передаточная матрица $Q(s)$ такая, что передаточная матрица $D(s) = Q(s) W_L(s)$ является асимптотически устойчивой минимально-фазовой блочно-диагональной. Одна из возможных реализаций матрицы $Q(s)$ определяется выражением

$$(14) \quad Q(s) = \text{adj } W_L(s),$$

где $\text{adj } W_L(s)$ – присоединенная к $W_L(s)$ матрица. При этом $D(s) = \text{diag} \left\{ \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \right\}$, где $\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \det W_L(s)$.

Доказательство. Так как объект (1) является полностью управляемым и наблюдаемым, матрицы B и C имеют полные ранги, а матрица L выбрана таким образом, что собственные числа A_L не совпадают с инвариантными нулями системы (1)², то $\det W_L(s) \neq 0$ и существует $W_L^{-1}(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} \text{adj } W_L(s)$. При этом в силу асимптотической устойчивости $W_L(s)$

² Как известно, обратная связь по состоянию – в данном случае это $L_y C x$ – не влияет на нули замкнутой системы [34, с. 237].

и минимальной фазовости объекта (1) полиномы $\beta(s)$ и $\alpha(s)$ являются гурвицевыми, а $\text{adj } W_L(s)$ – асимптотически устойчивой [35, с. 7]. Тогда из равенства $W_L^{-1}(s)W_L(s) = \frac{1}{\det W_L(s)}\text{adj } W_L(s)W_L(s) = I$ следует справедливость (14). Непосредственные вычисления матрицы $Q(s)$ для других блочно-диагональных форм $D(s)$ показывают, что данное решение является не единственным (см. пример в разделе 6 “Результаты моделирования”).

Выберем матрицу *последовательного компенсатора* $Q(s)$ (например, в форме (14)) и сформируем *фильтрованное несмешанное возмущение*

$$(15) \quad \bar{\delta}_f = Q(s) [y - C\hat{x}].$$

Для $\bar{\delta}_f$ можно записать

$$(16) \quad \bar{\delta}_f = \text{diag}\{w_i(s)\}[\delta], \quad i = 1, \dots, m,$$

или

$$\bar{\delta}_{fi} = w_i(s)[\delta_i],$$

где $w_i(s)$ – минимально фазовые асимптотически устойчивые передаточные функции (например, при $Q(s) = \text{adj } W_L(s)$ имеем $w_i(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$ для всех $i = 1, \dots, m$), а $\bar{\delta}_{fi}$ – i -я координата $\bar{\delta}_f$.

3.3. Параметризация исходного многомерного возмущения

Однако на объект (1) воздействует не фильтрованное несмешанное $\bar{\delta}_f$, а исходное возмущение δ . С учетом леммы 1 и (16) делаем вывод о справедливости следующего утверждения.

Лемма 3. При условии выполнения допущений Д.1.1–Д.1.4 и Д.2.1–Д.2.3 возмущение δ , действующее на объект (1), может быть представлено в виде регрессионной модели

$$(17) \quad \delta = \Theta \bar{\xi}_f + \bar{\epsilon},$$

где $\bar{\epsilon}$ экспоненциально затухает, регрессор $\bar{\xi}_f$ является вектором состояния наблюдателя

$$(18) \quad \dot{\bar{\xi}}_f = G \bar{\xi}_f + LQ(s) [y - C\hat{x}]$$

с произвольным начальным условием $\bar{\xi}_f(0)$, матрицы G , L и Θ являются блочно-диагональными

$$G = \text{diag}\{G_i\}, \quad L = \text{diag}\{l_i\}, \quad \Theta = \text{diag}\{\psi_{fi}^\top\},$$

а $\psi_{fi} \in \mathbb{R}^{q_i}$ являются векторами неизвестных постоянных коэффициентов ($i = 1, \dots, m$).

Действительно, динамический фильтр (18) с многомерным входом $\bar{\delta}_f$ (15) распадается на m независимых фильтров типа (6) со скалярными входами $\bar{\delta}_i = w_i(s)[\delta_i]$ и состояниями $\bar{\xi}_{fi}$, что соответствует условиям леммы 1.

Таким образом, лемма 3 сводит неопределенность возмущения δ к параметрической неопределенности регрессионной модели (17) с матрицей неизвестных параметров Θ и физически реализуемым регрессором $\bar{\xi}_f$. При этом модель объекта управления (1) может быть записана в виде

$$(19) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u + \Xi\theta + \bar{\epsilon}), & x(0), \\ y = Cx, \end{cases}$$

где $\Xi = \text{diag}\{\bar{\xi}_{fi}^\top\} \in \mathbb{R}^{m \times q}$ – блочно-диагональный матричный регрессор, имеющий на главной диагонали m векторных блоков $\bar{\xi}_{fi}^\top$, $\theta = [\psi_{f1}^\top, \dots, \psi_{fm}^\top]^\top \in \mathbb{R}^q$ – вектор неизвестных параметров, составленный из диагональных блоков ψ_{fi} матрицы Θ .

Замечание 5. Альтернативным, но не оптимальным с точки зрения динамического порядка наблюдателя возмущения (а следовательно, и числа настраиваемых параметров в адаптивном регуляторе), является подход, при котором каждая компонента δ_{fi} фильтрованного возмущения δ_f рассматривается в качестве выхода командного генератора полной размерности (подобный подход использован в [18, 20, 28]). Действительно, для δ_{fi} можно записать

$$(20) \quad \begin{aligned} \delta_{fi} &= \sum_{j=1}^m w_{Lij}(s)[\delta_j] = \sum_{j=1}^m h_j^\top w_{Lij}(s)[\xi_j] = \sum_{j=1}^m h_j^\top M_{ij}\xi_j + \epsilon_{ij} = \\ &= \bar{h}_i^\top \xi + \epsilon, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где $w_{Lij}(s)$ – элементы передаточной матрицы $W_L(s)$, M_{ij} – матрицы подобиия для установившихся составляющих, $\bar{h}_i^\top = [h_1^\top M_{i1}, \dots, h_m^\top M_{im}] \in \mathbb{R}^q$ – вектор неизвестных параметров, $\xi \in \mathbb{R}^q$ – вектор состояния модели (3). Выражение (20) мотивирует использование наблюдателя возмущения размерности q в каждом канале системы управления, что ведет к общему динамическому порядку наблюдателя $m \times q$ и к такому же числу настраиваемых параметров. В то же время предложенная модель (17) может быть получена с помощью наблюдателя q -го порядка (при статическом компенсаторе $Q(s)$ – см. пример), содержит q неизвестных параметров и, следовательно, q настраиваемых параметров в адаптивном регуляторе.

Анализ модели (19) мотивирует следующий выбор структуры алгоритма управления:

$$(21) \quad u = u_x + u_\delta,$$

где u_x – стабилизирующая компонента управления, а u_δ – компенсирующая возмущение компонента управления. Раздельному синтезу этих компонент посвящены следующие две секции настоящей статьи.

4. Синтез алгоритма адаптации

Выбирая

$$(22) \quad u_\delta = -\Xi\hat{\theta},$$

где $\hat{\theta}$ – вектор настраиваемых параметров, и подставляя (21) и (22) в (19), получаем модель ошибки управления

$$(23) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u_x + \Xi\tilde{\theta} + \bar{\epsilon}), & x(0), \\ y = Cx \end{cases}$$

с вектором параметрических ошибок $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$.

Так как вектор состояния x не доступен измерениям, а матрица A может быть неустойчивой, то для синтеза алгоритма адаптивной настройки параметров $\hat{\theta}$ сформируем статическую регрессионную модель, определяемую следующим утверждением.

Лемма 4. Введем в рассмотрение расширенную ошибку

$$(24) \quad \bar{y} = y - C\hat{x} - \Xi_f\hat{\theta},$$

где вектор \hat{x} генерируется фильтром (9), $\Xi_f \in \mathbb{R}^{m \times qm}$ – матричный регрессор вида

$$(25) \quad \Xi_f = \begin{bmatrix} w_{L11}(s) \left[\bar{\xi}_{f1}^\top(t) \right] & \dots & w_{L1m}(s) \left[\bar{\xi}_{fm}^\top(t) \right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{Lm1}(s) \left[\bar{\xi}_{f1}^\top(t) \right] & \dots & w_{Lmm}(s) \left[\bar{\xi}_{fm}^\top(t) \right] \end{bmatrix},$$

а $w_{Lij}(s)$ – элементы асимптотически устойчивой передаточной функции $W_L(s) = C(sI - A_L)^{-1}B$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m$). Тогда для сигнала \bar{y} справедливо следующее равенство:

$$(26) \quad \bar{y} = \Xi_f\tilde{\theta} + \bar{\epsilon}_f,$$

где $\bar{\epsilon}_f$ экспоненциально затухает.

Доказательство леммы 4 приведено в Приложении.

Модель (26) хорошо известна в современной теории адаптивных систем [36, 37] и идентификации [38] и позволяет использовать широкий класс стандартных алгоритмов адаптации. В том числе:

– *градиентный алгоритм адаптации* [19, 36, 37]

$$(27) \quad \dot{\hat{\theta}} = \gamma \Xi_f^\top \bar{y},$$

– *алгоритм с улучшенной параметрической сходимостью* [19, 39]

$$(28) \quad \dot{\hat{\theta}} = \gamma \left(d(s) \left[\Xi_f^\top \bar{y} \right] - \Omega \hat{\theta} \right),$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент адаптации, $\Omega = d(s)[\Xi_f^T \Xi_f]$ – расширенный матричный регрессор, $d(s)$ – минимально фазовая асимптотически устойчивая положительная передаточная функция с действительными корнями характеристического уравнения и единичным статическим коэффициентом (т.е. $d(0) = 1$). В простейшем случае $d(s)$ может быть выбран в виде аperiодического звена первого порядка. Свойства сходимости алгоритмов адаптации (27) и (28) определяются следующим утверждением, доказательство которого приведено в Приложении.

Лемма 5. При выполнении допущений Д.1.1–Д.1.4 и Д.2.1–Д.2.3

Л.5.1. алгоритмы адаптации (27) и (28) обеспечивают ограниченность \bar{y} и $\hat{\theta}$, а также асимптотическое стремление $|\Xi(t)\tilde{\theta}(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$;

Л.5.2. если $\lambda(t) \notin \mathcal{L}_1$, где $\lambda(t)$ – минимальное собственное значение матрицы $\Omega(t)$, то алгоритм адаптации (28) дополнительно к свойству Л.5.1 обеспечивает асимптотическую сходимость $|\tilde{\theta}(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$;

Л.5.3. если регрессор ξ удовлетворяет условию исчезающего возбуждения (в смысле определения 4.3.1 из [36] или определения 3.4 из [19]), то алгоритмы адаптации (27) и (28) дополнительно к свойству Л.5.1 обеспечивают экспоненциальную сходимость $|\tilde{\theta}(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

5. Синтез стабилизирующей компоненты и свойства замкнутой системы

Так как вектор x не доступен прямым измерениям, используем наблюдатель состояния вида

$$(29) \quad \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu_x + L_y(y - C\bar{x}),$$

где \bar{x} – вектор состояния наблюдателя с произвольным начальным условием $\bar{x}(0)$. Введем в рассмотрение вектор невязки $\tilde{x} = x - \bar{x}$. Вычитая (29) из (23), получаем

$$\dot{\tilde{x}} = A_L\tilde{x} + B(\Xi\tilde{\theta} + \bar{\epsilon}).$$

В силу свойства Л.5.1 леммы 5 имеем $|\Xi(t)\tilde{\theta}(t)| \rightarrow 0$, следовательно, $|\tilde{x}(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Сформируем стабилизирующее управление вида

$$(30) \quad u_x = -K\bar{x},$$

где матрица обратных связей такая, что матрица $A_K = A - BK$ является гурвицевой. Подставляя (30) в (23), получаем модель замкнутой системы

$$\dot{x} = A_Kx + B(\Xi\tilde{\theta} - K\tilde{x} + \bar{\epsilon}).$$

Так как $|\tilde{x}(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то немедленно получаем, что $|x(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что означает выполнение целевого условия (4). Таким образом, доказали следующее утверждение.

Теорема 1. При выполнении допущений Д.1.1–Д.1.4 и Д.2.1–Д.2.3 закон управления (21), содержащий компенсирующую составляющую (22), стабилизирующую составляющую (30), наблюдатель возмущения (9), (18), алгоритм адаптации (27) или (28) и наблюдатель состояния (29), применительно к объекту управления (1), обеспечивает ограниченность всех сигналов и выполнение целевого условия (4).

6. Пример и результаты моделирования

Рассмотрим неустойчивый объект управления (1) с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 4,5 & -7 & 0 \\ 12 & -20 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

и передаточной матрицей

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{s-1} \\ 1 & \frac{1}{s-1} \\ \frac{1}{s^2 + 3s - 1} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}.$$

В данном случае объект не имеет инвариантных нулей и поэтому является минимально-фазовым.

Пусть $\delta = [\delta_1, \delta_2]^\top = [\sin t, 1]^\top$ – неизмеряемое и заранее неизвестное возмущение, первая компонента которого может рассматриваться в качестве выхода экзосистемы (2) второго порядка, а вторая компонента – экзосистемы первого порядка. В этом случае можно записать

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} h_1^\top & 0 \\ 0 & h_2^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Выберем

$$L_y = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A_L = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1,5 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad W_L(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Наконец, для построения наблюдателя возмущения выберем

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

В методических целях вычислим матрицы M_ξ , \bar{H} и M_f , являющиеся решениями уравнений (12) и (13) соответственно. Получаем неблочно-диагональную матрицу

$$\bar{H} = CM_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0,1 & -0,3 & 1 \end{bmatrix}$$

и вырожденную матрицу

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,33 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,04 & -0,28 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, проиллюстрировано, что в рассматриваемом случае прямое расширение леммы 1 на векторное возмущение невозможно без применения специальных методов.

В соответствии с предложенным в статье подходом, рассчитаем передаточную матрицу последовательного компенсатора

$$(31) \quad Q(s) = \text{adj } W_L(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & 0 \end{bmatrix}$$

и сформируем фильтрованное несмешанное возмущение (15). Тогда можно показать, что для $\bar{\delta}_f$ справедлива следующая модель:

$$\bar{\delta}_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} [\delta_1] \\ \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} [\delta_2] \end{bmatrix}.$$

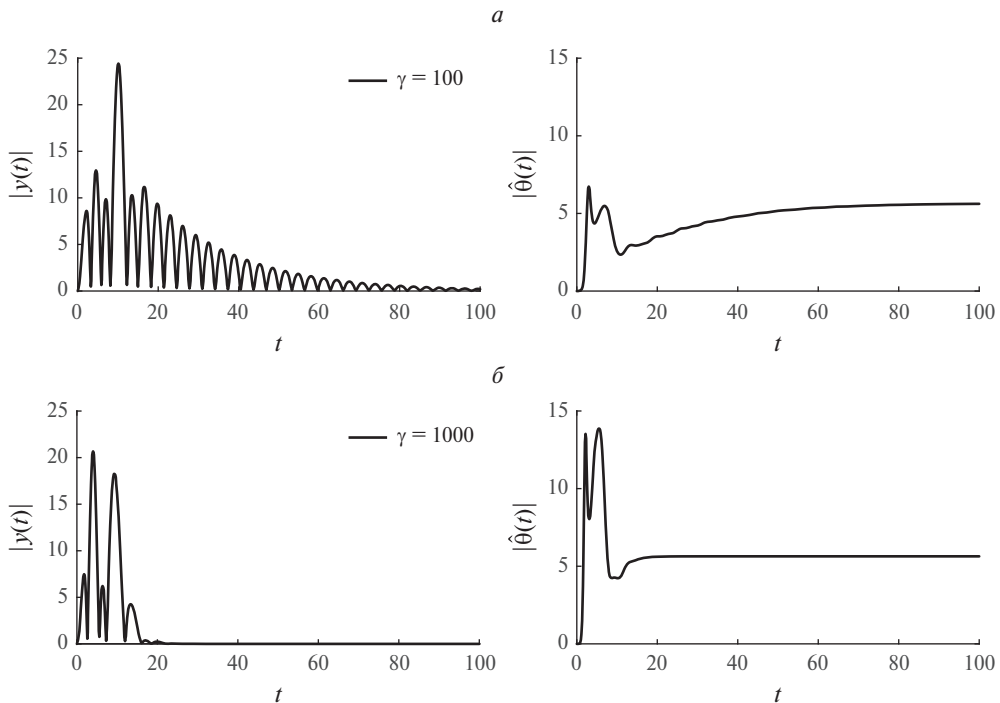
Однако, как было указано в лемме 2, компенсатор (31) не является единственным, приводящим возмущение к несмешанной форме. Действительно, в рассматриваемом примере простой последовательный компенсатор

$$(32) \quad Q(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

дает следующую модель несмешанного фильтрованного возмущения:

$$\bar{\delta}_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} [\delta_1] \\ \frac{1}{s+1} [\delta_2] \end{bmatrix}.$$

При моделировании будем использовать последовательный компенсатор (32).



Переходные процессы в адаптивной системе, замкнутой алгоритмом адаптации с улучшенной параметрической сходимостью при: *a* – $\gamma = 100$; *б* – $\gamma = 1000$.

Результаты моделирования замкнутой системы с алгоритмом адаптации с улучшенной сходимостью (28) при $d(s) = \frac{1}{s+1}$ и двух различных значениях γ , стабилизирующим управлением (30) с

$$K = \begin{bmatrix} 25,0 & -0,91 & -8,38 \\ 36,25 & -4,83 & -10,67 \end{bmatrix},$$

при нулевых начальных условиях в объекте и алгоритме управления представлены на рисунке и демонстрируют достижение цели управления (4) в условиях действия внешнего заранее неизвестного возмущения, а также возможность ускорения процессов настройки регулятора за счет увеличения коэффициента адаптации γ .

7. Заключение

В работе представлено решение задачи адаптивной компенсации внешних неизвестных детерминированных возмущений при управлении многоканальным линейным объектом по выходу. Предлагаемое решение основано на адаптивной реализации метода внутренней модели и построении наблюдателя специальной формы, позволяющего получить несмешанную параметризацию

возмущения. Представленный подход дает возможность синтезировать адаптивный регулятор с числом настраиваемых параметров, равным числу неизвестных коэффициентов характеристического полинома модели возмущения, тем самым обеспечивая понижение вычислительной сложности алгоритма по сравнению с известными решениями.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 4. Перепишем (25) в форме “вход–состояние–выход”

$$(П.1) \quad \begin{cases} \dot{\Xi}_x = A_L \Xi_x + B \Xi, \\ \Xi_f = C \Xi_x. \end{cases}$$

Введем промежуточную переменную

$$(П.2) \quad \epsilon_x = x - \hat{x} - \Xi_x \theta$$

и рассчитаем ее производную по времени в силу (19), (9) и (П.1):

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x = x - \dot{\hat{x}} - \dot{\Xi}_x \theta &= Ax + Bu + B \Xi \theta + \bar{\epsilon} - A \hat{x} - Bu - L_y (Cx - C \hat{x}) - \\ &- A_L \Xi_x \theta - B \Xi \theta = A_L \epsilon_x + \bar{\epsilon}. \end{aligned}$$

В силу гурвицевости матрицы A_L величина $\epsilon_x(t)$ экспоненциально затухает.

Тогда $x - \hat{x} = \Xi_x \theta + \epsilon_x$ или

$$(П.3) \quad y - C \hat{x} = \Xi_f \theta + \bar{\epsilon}_f,$$

где $\bar{\epsilon}_f = C \epsilon_x$. Подставляя (П.3) в (24), непосредственно получаем (26).

Доказательство леммы 5. Выберем функцию Ляпунова

$$(П.4) \quad V = \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^\top \tilde{\theta} + \int_t^\infty \bar{\epsilon}_f^\top(\tau) \bar{\epsilon}_f(\tau) d\tau$$

и вычислим ее производную в силу (26), равенства $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$ и поочередно с учетом алгоритмов (27) и (28):

1. Алгоритм (27).

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\tilde{\theta}^\top \Xi_f^\top \Xi_f \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^\top \Xi_f^\top \bar{\epsilon}_f - \bar{\epsilon}_f^\top \bar{\epsilon}_f = \\ &= -\frac{1}{2} |\Xi_f \tilde{\theta}|^2 - \frac{1}{2} |\bar{\epsilon}_f| - \frac{1}{2} \left(|\Xi_f \tilde{\theta}| + |\bar{\epsilon}_f| \right)^2 \leq -\frac{1}{2} |\Xi_f \tilde{\theta}|^2. \end{aligned}$$

Из последнего следует ограниченность $\hat{\theta}$ и $|\Xi_f \tilde{\theta}| \in \mathcal{L}_2$. В силу ограниченности Ξ и устойчивости фильтра $W_L(s)$ выход линейной регрессии (26) \bar{y} и производная $\dot{\hat{\theta}}$ ограничены. Так как функция $|\Xi_f(t) \tilde{\theta}(t)| \in \mathcal{L}_2$ и является непрерывной и ограниченной, то $|\Xi_f(t) \tilde{\theta}(t)|, \dot{\hat{\theta}}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Согласно лемме о перестановке, применяемой для многоканальных систем (см. [19, раздел D.2]), имеем

$$(П.5) \quad W_L(s) \left[\Xi \tilde{\theta} \right] = \Xi_f \tilde{\theta} + W_L(s) \left[\Xi_f \dot{\tilde{\theta}} \right],$$

где Ξ_f – выход фильтра (П.1) из Приложения. Из последнего выражения следует, что в силу ограниченности $\Xi(t)$, устойчивости $W_L(s)$ и сходимостей $|\Xi_f(t)\tilde{\theta}(t)|$, $\dot{\tilde{\theta}}(t) \rightarrow 0$ справедлива сходимость $W_L(s) \left[\Xi(t)\tilde{\theta}(t) \right] \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Так как $W_L(s)$ невырождена и минимально фазовая, а $\dot{\Xi}$, $\dot{\tilde{\theta}}$ ограничены, то $|\Xi(t)\tilde{\theta}(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

2. Алгоритм (28). Проанализируем производную функции V с учетом неравенства Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\tilde{\theta}^\top \Omega \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^\top d(s) \left[\Xi_f^\top \bar{\epsilon}_f \right] - \bar{\epsilon}_f^\top \bar{\epsilon}_f = \\ &= -\tilde{\theta}^\top \Omega \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^\top(t) \int_0^t h(t-\tau) \Xi_f^\top(\tau) \bar{\epsilon}_f(\tau) d\tau - |\bar{\epsilon}_f|^2 \leq \\ &\leq -\tilde{\theta}^\top \Omega \tilde{\theta} + \left(\int_0^t h(t-\tau) \left(\tilde{\theta}(t) \Xi_f^\top(\tau) \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t h(t-\tau) \bar{\epsilon}_f^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} - |\bar{\epsilon}_f|^2, \end{aligned}$$

где $h(t-\tau) \geq 0$ – импульсная функция фильтра $d(s)$. Принимая во внимание, что

$$\int_0^t h(t-\tau) \left(\tilde{\theta}(t) \Xi_f^\top(\tau) \right)^2 d\tau \leq c_d \tilde{\theta}^\top(t) \Omega(t) \tilde{\theta}(t), \quad \int_0^t h(t-\tau) \bar{\epsilon}_f^2(\tau) d\tau \leq c_d |\bar{\epsilon}_f|^2,$$

где $c_d = |d(s)|_\infty = 1$, продолжаем анализ \dot{V} :

$$(П.6) \quad \dot{V} \leq -\tilde{\theta}^\top \Omega \tilde{\theta} + \left(\tilde{\theta}^\top \Omega \tilde{\theta} \right)^{\frac{1}{2}} |\bar{\epsilon}_f| - |\bar{\epsilon}_f|^2 \leq -\frac{1}{2} \tilde{\theta}^\top \Omega \tilde{\theta}.$$

Из последнего следует ограниченность $\tilde{\theta}$ и $|\Omega^{\frac{1}{2}} \tilde{\theta}| \in \mathcal{L}_2$. Как следствие, в силу устойчивости фильтров $W_L(s)$ и $d(s)$ функции $\Omega(t)$ и $\tilde{\Omega}$ ограничены, откуда следует $|\Omega \tilde{\theta}| \in \mathcal{L}_2$ и $|\Omega(t)\tilde{\theta}(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Так как $\dot{\tilde{\theta}}(t) \rightarrow 0$, то (см. лемму 1 о перестановке в [40]) $d(s) \left[\Xi_f^\top(t) \Xi_f(t) \tilde{\theta}(t) \right] \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Так как $\dot{\Xi}_f$ и $\dot{\tilde{\theta}}$ ограничены, то из сходимости $d(s) \left[\Xi_f^\top(t) \Xi_f(t) \tilde{\theta}(t) \right] \rightarrow 0$ следует сходимость $\Xi_f(t) \tilde{\theta}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Учитывая рассуждения, приведенные выше для доказательства свойства Л.5.1 для алгоритма (27), из сходимости $\Xi_f(t) \tilde{\theta}(t) \rightarrow 0$ имеем сходимость $\Xi(t) \tilde{\theta}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Свойство Л.5.1 доказано.

Для доказательства свойства Л.5.2 продолжим анализ производной (П.6) с учетом (П.4):

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\tilde{\theta}^\top \Omega \tilde{\theta} \leq -\frac{1}{2}\lambda(t)\tilde{\theta}^\top \tilde{\theta} = -\gamma V + \gamma \int_t^\infty \bar{\epsilon}_f^\top(\tau)\bar{\epsilon}_f(\tau)d\tau.$$

Решая полученное дифференциальное неравенство, имеем

$$V(t) \leq e^{-\gamma \int_0^t \lambda(\tau_1)d\tau_1} V(0) + \gamma \int_0^t e^{-\gamma \int_{\tau_3}^t \lambda(\tau_2)d\tau_2} \int_{\tau_3}^\infty \bar{\epsilon}_f^\top(\tau_1)\bar{\epsilon}_f(\tau_1)d\tau_1 d\tau_3,$$

откуда следует свойство Л.5.2.

Для доказательства свойства Л.5.3 для алгоритма (27) см. [37, раздел 2.8]. Для доказательства свойства Л.5.3 для алгоритма (28) см. [19, раздел 3.2.3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Landau I.D., Airimitoae T.-B., Castellanos-Silva A., et al.* Adaptive and Robust Active Vibration Control: Methodology and Tests. Springer, 2017.
2. *Zapateiro de la Hoz M., Pozo F. (Eds.)* Advances on Analysis and Control of Vibrations-Theory and Applications. InTech, 2012.
3. *Fuller C., Elliott S., Nelson P.* Active Control of Vibration. Academic, Cambridge, 1999.
4. *Njeh M., Cauet S., Coirault P.* Persistent disturbances rejection on internal combustion engine torque in hybrid electric vehicles // In Proc of IEEE Conference on Decision and Control. 2010. P. 6421–6426.
5. *Orivuori J., Zazas I., Daley S.* Active control of frequency varying disturbances in a diesel engine // Control Engineering Practice. 2012. V. 20. P. 1206–1219.
6. *Kugi A., Hass W., Schlacher K., et al.* Active compensation of roll eccentricity in rolling mills // IEEE Trans. Industrial Application. 2000. V. 36. P. 625–632.
7. *Shin K., Jang J., Kang J., and Song S.* Compensation method for tension disturbance due to an unknown roll shape in a web transport system // IEEE Trans. Industrial Application. 2003. V. 39. P. 1422–1428.
8. *Furtmuller C., Colaneri P., Rea L.* Adaptive robust stabilization of continuous casting // Automatica. 2012. V. 48. P. 225–232.
9. *Liu J.-J., Yang Y.-P.* Stability of the frequency adaptive control technique and its application to compact disk drives // Control Engineering Practice. 2005. V. 13. No. 5. P. 629–639.
10. *Wu Z., Li Y., Wang P., Liu M.* Dynamic head-disk interface modeling and adaptive control of a hybrid actuator for optical data storage systems // Int. J. Optomechatronics. 2015. V. 9. P. 62–88.
11. *Burdisso R.A., Fuller C.R., Suarez L.E.* Adaptive feedforward control of structures subjected to seismic excitations // In Proc. of the American Control Conf. 1993. P. 2104–2108.

12. *Messineo S., Celani F., Egeland O.* Crane feedback control in offshore moonpool operations // *Control Engineering Practice*. 2008. V. 16. P. 356–364.
13. *Messineo S., Serrani A.* Offshore crane control based on adaptive external models // *Automatica*. 2009. V. 9. P. 2546–2556.
14. *Pham H., Jung H., Hu T.* State-space approach to modeling and ripple reduction in AC-DC converters // *IEEE Trans. Control Systems Technology*. 2013. V. 21. No. 5. P. 1949–1955.
15. *Maier S., Bals J., Bodson M.* Periodic disturbance rejection of a PMSM with adaptive control algorithms // *Proc. the IEEE Int. Electric Machines and Drives Conf.* 2011. P. 1070–1075.
16. *Francis D.A., Wonham W.M.* The internal model principle for linear multivariable regulators // *Appl. Math. Optim.* 1975. V. 2. P. 170–194.
17. *Davison E.J.* The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1976. V. 21. P. 25–34.
18. *Isidori A.* Lectures in Feedback design for Multivariable systems. Switzerland: Springer, 2017.
19. *Nikiforov V., Gerasimov D.* Adaptive Regulation. Reference Tracking and Disturbance Rejection. Switzerland: Springer, 2022.
20. *Pyrkin A., Isidori A.* Adaptive output regulation of right-invertible MIMO LTI systems, with application to vessel motion control // *Eur. J. Control*. 2019. V. 46. P. 63–79.
21. *Marino R., Tomei P.* Output regulation for linear systems via adaptive internal model // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2003. V. 48. No. 12. P. 2199–2202.
22. *Бобцов А.А.* Алгоритм управления по выходу с компенсацией гармонического возмущения со смещением // *АиТ*. 2008. № 8. С. 25–32.
Bobtsov A.A. Output control algorithm with the compensation of biased harmonic disturbances // *Autom. Remote Control*. 2008. V. 69. No. 8. P. 1289–1296.
23. *Бобцов А.А., Пыркин А.А.* Компенсация неизвестного синусоидального возмущения для линейного объекта любой относительной степени // *АиТ*. 2009. № 3. С. 114–122.
Bobtsov A.A., Pyrkin A.A. Compensation of unknown sinusoidal disturbances in linear plants of arbitrary relative degree // *Autom. Remote Control*. 2009. V. 70. No. 3. P. 449–456.
24. *Yilmaz C.T., Basturk H.I.* Output feedback control for unknown LTI systems driven by unknown periodic disturbances // *Automatica*. 2019. V. 99. P. 112–119.
25. *Marino R., Santosuosso G.L.* Regulation of linear systems with unknown exosystems of uncertain order // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2007. V. 52(2). P. 352–359.
26. *Никифоров В.О., Парамонов А.В., Герасимов Д.Н.* Алгоритмы адаптивного регулирования в многоканальных линейных системах с запаздыванием по управлению // *АиТ*. 2020. № 6. С. 153–172.
Nikiforov V.O., Paramonov A.V., Gerasimov D.N. Adaptive control algorithms in MIMO linear systems with control delay // *Autom. Remote Control*. 2020. V. 81. No. 6. P. 1091–1106.
27. *Obregon-Pulido G., Castillo-Toledo B., Loukianov A.* A Structurally Stable Globally Adaptive Internal Model Regulator for MIMO Linear Systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2011. V. 56. No. 11. P. 160–165.

28. *Borisov O., Isidori A., Pyrkin A.* Adaptive output regulation of MIMO LTI systems with unmodeled input dynamics // 62nd IEEE Conference on Decision and Control. 2023. P. 1537–1542.
29. *Jafari S., Ioannou P.* Rejection of unknown periodic disturbances for continuous-time MIMO systems with dynamic uncertainties // Int. J. Adapt. Control Signal Process. 2016. V. 30(12). P. 1674–1688.
30. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних возмущений. Часть 1. Объекты с известными параметрами // АиТ. 2004. № 10. С. 13–23.
31. *Никифоров В.О.* Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб.: Наука, 2003.
32. *Lyubomir T. Gruyitch.* Control of Linear Systems. Observability and Controllability of General Linear Systems. U.S.: Taylor and Francis, 2019.
33. *Hespanha J.P.* Linear Systems Theory. Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2018.
34. *Chen C-T.* Linear Systems. Theory and design. NY.: Oxford University Press, 1999.
35. *Gasparyan O.* Linear and Nonlinear Multivariable Feedback Control. John Wiley & Sons, Ltd., 2008.
36. *Ioannou P., Sun J.* Robust Adaptive Control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
37. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable Adaptive Systems. Prentice Hall, 1989.
38. *Льюнг Л.* Идентификация систем: Теория для пользователя. М.: Наука, 1991.
39. *Kreisselmeier G.* Adaptive observers with exponential rate of convergence // IEEE Trans. Autom. Control. 1977. V. 22. No. 1. P. 2–8.
40. *Gerasimov D.N., Nikiforov V.O.* On key properties of the Lion's and Kreisselmeier's adaptation algorithms // Int. J. Adapt. Control Signal Proc. 2021. V. 36. No. 6. P. 1285–1304.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 10.09.2024

После доработки 28.11.2024

Принята к публикации 28.01.2025